2019- 2020 Eğitim Öğretim Yılı Analiz IV Dersi I. Quiz Soruları

1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = 2 + (-1)^n + \frac{1}{3^n}$ biçiminde tanımlı (x_n) dizisinin $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$ limitlerini bulunuz.

2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 0\}$ kümesinin bağlantılı olup olmadığını araştırınız.

3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\sin(x^2 y^2)}{y} + x^2 \right) = ?$

13.04.2020

Başarılar Dileriz.

Prof. Dr. Cenap Duyar - Doç. Dr. Ayşe Sandıkçı

CEVAPLAR

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ üst limiti için;

n **çift olsun**. Buradan

$$y_n = \sup\{x_k : k \geq n\} = \sup\left\{3+\frac{1}{3^n}, 1+\frac{1}{3^{n+1}}, 3+\frac{1}{3^{n+2}}\cdots\right\} = 3+\frac{1}{3^n}$$

olur. n **tek olsun**. O halde

$$z_n = \sup\{x_k : k \geq n\} = \sup\left\{1+\frac{1}{3^n}, 3+\frac{1}{3^{n+1}}, 1+\frac{1}{3^{n+2}}\cdots\right\} = 3+\frac{1}{3^{n+1}}$$

bulunur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 3$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = 3$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ alt limiti için;

n **çift olsun**. Buradan

$$y_n' = \inf\{x_k : k \geq n\} = \sup\left\{3+\frac{1}{3^n}, 1+\frac{1}{3^{n+1}}, 3+\frac{1}{3^{n+2}}, 1+\frac{1}{3^{n+3}}\cdots\right\} = 1$$

olur.

n **tek olsun**. O halde

$$z_n' = \inf\{x_k : k \geq n\} = \sup\left\{1+\frac{1}{3^n}, 3+\frac{1}{3^{n+1}}, 1+\frac{1}{3^{n+2}}\cdots\right\} = 1$$

yazılır.

Böylece

$$\lim_{n\to\infty} y_n' = \lim_{n\to\infty} z_n' = 1$$

olduğundan $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ elde edilir.

2. $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0,\ y>0\}$ ve $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y<0\}$ ayrık açık kümelerini alalım. Böylece

$B\subset U\cup V$, $B\cap U\neq\varnothing$ ve $B\cap V\neq\varnothing$ olduğundan B kümesi bağlantısızdır.

3. Eğer

$$f_1(x,y)=\frac{\sin(x^2y^2)}{y} \qquad \text{ve} \qquad f_2(x,y)=x^2$$

denirse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\big((f_1+f_2)(x,y)\big)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\sin(x^2y^2)}{y}+x^2\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y^2)}{y}+\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2$$

yazılır.

Şimdi f_1 fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini araştıralım. Eğer $x=0$ doğrusu boyunca yaklaşılırsa

$$\lim_{y\to0}f_1(0,y)=\lim_{y\to0}\frac{\sin 0}{y}=0$$

olur. $y=x$ doğrusu boyunca yaklaşılırsa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_1(x,y)=\lim_{x\to0}f_1(x,x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^4}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^4}{x^4}x^3=0$$

bulunur. O halde f_1 fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limit varsa 0 olmalıdır. Limitin 0 olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı verilsin. Bir $\delta_1>0$ sayısını $\delta_1=\sqrt[3]{\varepsilon}$ olarak seçelim.

$$\|(x,y)-(0,0)\|=\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta_1$$

olduğunda,

$$|x|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta_1 \qquad \text{ve} \qquad |y|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta_1$$

olup,

$$|f_1(x,y)-0|=\left|\frac{\sin(x^2y^2)}{y}\right|\le\frac{x^2y^2}{|y|}=x^2|y|<\delta_1^3=\varepsilon$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0$$

yazılır.

Yine bir $\delta_2 > 0$ sayısını $\delta_2 = \sqrt{\varepsilon}$ olacak şekilde seçelim.

$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta_2$ olduğunda $|x| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta_2$ olması kullanılırsa

$$|f_2(x,y)-0| = |x^2| = |x|^2 < \delta_2^2 = \varepsilon$$

elde edilir. Yani $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$ bulunur.

Böylece fonsiyonların toplamının limiti özelliğinden

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\sin\left(x^2y^2\right)}{y} + x^2 \right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) + \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0 + 0 = 0$$

elde edilir.